NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN TRUNG TÍNH VỚI PHẦN TUYẾN TÍNH THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN HILLE – YOSIDA

SOLUTION OF THE PARTIAL NEUTRAL FUNCTION DIFFERENTIAL EQUATION WITH THE LINEAR PART SATISFYING THE HILLE - YOSIDA CONDITION

Ngô Quý Đăng[1], Phạm Văn Bằng[2]

[1]*Trường Cao đẳng Sư phạm Thái Bình,*

[2]*Trường Đại học Kinh tế - Kỹ thuật Công nghiệp*

Đến Tòa soạn ngày 06/02/2024, chấp nhận đăng ngày 11/04/2024

Tóm tắt: Trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của phương trình trung tính nửa tuyến tính với phần tuyến tính thỏa mãn điều kiện Hille - Yosida và toán tử trễ phi tuyến thỏa mãn điều kiện Lipschitz. Trong trường hợp họ tiến hóa có nhị phân mũ chúng tôi xây dựng công thức nghiệm Lyapunov - Perron và chỉ ra sự tồn tại nghiệm.

Từ khóa: Nghiệm đủ tốt, phương trình tiến hóa, nhị phân mũ, không gian chấp nhận được.

Abstract: In this paper, we study the existence of solution for semi-linear partial neutral functional differential equations with the linear part satisfies the Hille - Yosida condition and the nonlinear delay operator satisfies the Lipschitz condition. In the case of the evolution family have an exponential dichotomy, we construct the Lyapunov - Perron solution formula and prove the existence of the solution.

Keywords: Mild solution, evolution equations, exponential dichotomy, admissible function spaces.

1. MỞ ĐẦU

Xét phương trình tiến hóa trung tính:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} Fu_t = (A + B(t))Fu_t + \Phi\left(t, u_t\right), \ t \geq 0 \\ u_0 \quad\quad = \varphi \in \mathcal{C} \end{cases} \quad (1)$$

Trong đó A là toán tử tuyến tính có miền xác định không trù mật $D(A)$ trong không gian Banach X thỏa mãn điều kiện Hille - Yosida. Đặt $\mathcal{C} := C\left([-r,0], X\right)$, $\left(B(t)\right)_{t\geq 0}$ là họ tuyến tính bị chặn trong $L(\overline{D(A)}, X)$, $F : \mathcal{C} \to X$ là toán tử sai phân có dạng $F = \delta_0 - \Psi$ với $\Psi \in L(\mathcal{C}, X)$, $\|\Psi\| < 1$, và δ_0 là hàm Dirac tập trung tại 0, toán tử trễ $\Phi : \mathbb{R}_+ \times \mathcal{C} \to X$ là hàm liên tục và hàm lịch sử $u_t \in \mathcal{C}$ được xác định $u_t(\theta) = u(t+\theta)$ với $\theta \in [-r, 0]$. Vào 1996 khi xem xét mạng lưới các đường dây truyền tải J. Wu and H. Xia đã chỉ ra mô hình tương ứng với phương trình vi phân trung tính: $\dfrac{\partial}{\partial t} Fu_t = a \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} Fu_t + \Phi u_t$ ([5]). Hale cùng các cộng sự đã đưa ra phương pháp để giải quyết bài toán trên, bằng cánh chỉ ra sự tồn tại và các tính chất của toán tử nghiệm [4]. Tuy nhiên đối với các phương trình vi phân trung tính phát sinh từ các hệ thống tự nhiên, kỹ thuật,... Khi đó việc nghiên cứu sự tồn tại và ổn định của nghiệm trở nên phức tạp, các phương pháp cũ không còn phù hợp. Gần đây, các phương trình vi phân có trễ, với trường hợp A sinh ra nửa nhóm liên lục mạnh hay $B(t)$ sinh ra họ tiến hóa liên tục mạnh, một số kết quả nền móng ban đầu về sự tồn tại, ổn định mũ của nghiệm, đã đạt được bởi N.T. Huy và một số tác giả khác [6, 7]. Trường hợp A là toán tử thỏa mãn điều kiện Hille - Yosida

và họ tiến hóa được sinh ra bởi toán tử $A+B(t)$ đã được Jendoubi xây dựng công thức nghiệm cho phương trình tiến hóa nửa tuyến tính [2,3]. Tuy nhiên, đối với phương trình trung tính trong không gian hàm chấp nhận được thì chưa được giải quyết. Do đó, trong bài báo này, chúng tôi sẽ xây dựng điều kiện đủ để phương trình (1) có nghiệm trong trường hợp $A + B(t)$ sinh ra họ tiến hóa có nhị phân mũ.

Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng lý thuyết của không gian ngoại suy, nguyên lý điểm bất động trong không gian Banach, chuỗi Neumann để chứng minh sự tồn tại nghiệm đủ tốt trên không gian Banach X.

Để thuận lợi cho việc chứng minh chúng tôi xây dựng các giả thiết và kí hiệu sử dụng trong bài báo như sau:

(H_1) A là toán tử Hille - Yosida. Với $w \in \mathbb{R}$ và $M \geq 1$ sao cho $(w,+\infty) \subset \rho(A)$ và $\left\|R(\lambda,A)^n\right\| \leq \dfrac{M}{(\lambda - w)^n}$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $\lambda > w$, trong đó $\rho(A)$ là tập giải của A và $R(\lambda,A) = (\lambda I - A)^{-1}$.

(H_2) Ánh xạ $t \mapsto B(t)x$ là đo được mạnh với mọi $x \in X_0 := \overline{D(A)}$ và tồn tại hàm $l \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ sao cho $\|B(.)\| \leq l(.)$.

(H_3) Φ thỏa mãn điều kiện φ - Lipschitz.

(H_4) Họ tiến hóa $\{U_B(t,s)\}_{t\geq s\geq 0}$ có nhị phân mũ với phép chiếu nhị phân $P_B(t), t \geq 0$ và hằng số $N, v > 0$.

2. KHÔNG GIAN CHẤP NHẬN ĐƯỢC, NGHIỆM ĐỦ TỐT CỦA PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

Chúng tôi nhắc lại một số định nghĩa và khái niệm sẽ sử dụng trong bài báo này. Trước tiên là một số kết quả trên không gian ngoại suy của toán tử HilleYosida. Từ định lý Hille-Yosida [1, Theorem II.3.8] chúng ta có:

Bổ đề 1. Giả sử A là toán tử Hille - Yosida trong không gian Banach X $X_0 = \overline{D(A)}$, $D(A_0) = \{x \in D(A) : Ax \in X_0\}$ và $A_0 : D(A_0) \subset X_0 \to X_0$ là toán tử được xác định bởi $A_0 x = Ax$. Khi đó, toán tử A_0 sinh ra nửa nhóm liên tục mạnh $(T_0(t))_{t\geq 0}$ trên X_0. Thỏa mãn, $\|T_0(t)\| \leq Me^{\omega t}$ với $\omega \in \mathbb{R}$ và $t \geq 0$. Hơn nữa, $\rho(A) \subset \rho(A_0)$ và $R(\lambda, A_0) = R(\lambda, A)|_{X_0}$, với $\lambda \in \rho(A)$.

Trên X_0 xác định một chuẩn như sau: $\|x\|_{-1} = \|R(\lambda, A_0)x\|, x \in X_0$. Với chuẩn này không gian $(X_0, \|.\|_{-1})$ được gọi là không gian liên kết của X_0 với toán tử liên kết A_0 và kí hiệu là X_{-1}. Họ toán tử $(T_{-1}(t))_{t\geq 0}$ là C_0 nửa nhóm trên X_{-1}, gọi là nửa nhóm liên kết của $(T_0(t))_{t\geq 0}$. Và miền xác định của toán tử A_{-1} bằng A_0. Tiếp theo, chúng ta sẽ định nghĩa nghiệm đủ tốt (mild solution) cho phương trình sau [2]

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = (A + B(t))u(t) + g(t, u_t) \\ u_0 \quad\quad = \varphi \in C \end{cases} \tag{2}$$

Định nghĩa 1. *Với $\phi \in C$ sao cho $\phi(0) \in \overline{D(A)}$. Hàm $u : [-r, +\infty) \to X$ là nghiệm đủ tốt của phương trình* (2)*, nếu $u_0 = \phi \in \mathcal{C}$ và $u(.)$ liên tục và thỏa mãn:*

$$u(t) = T_0(t)\phi(0) + \int_0^t T_{-1}(t-\tau)\left(B(\tau)u(\tau) + g(\tau, u_\tau)\right)d\tau \tag{3}$$

với $t \geq 0$. Trong đó, phương trình thuần nhất

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = (A + B(t))u(t) \\ u(0) \quad = x \in X_0 \end{cases} \tag{4}$$

thỏa mãn:

Ánh xạ $t \mapsto B(t)x$ là đo được mạnh với mọi $x \in X_0$ và tồn tại duy nhất họ tiến hóa $\left(U_B(t,s)\right)_{t\geq s\geq 0}$ thỏa mãn công thức biến thiên hằng số:

$$U_B(t,s)x = T_0(t-s)x + \int_s^t T_{-1}(t-\tau)B(\tau)U_B(\tau,s)x\,d\tau \quad (5)$$

với $t \geq s \geq 0, x \in X_0$.

Hơn nữa, ánh xạ $t \mapsto \mathrm{U}_B(t,0)x$ là nghiệm duy nhất của (4).

Bổ đề 2. *Một họ toán tử tiến hóa sinh bởi toán tử tuyến tính bị chặn $\left(U_B(t,s)\right)_{t\geq s\geq 0}$ tác động trên X_0 có các tính chất sau:*

1. $\mathrm{U}_B(t,t) = Id$ và $U_B(t,r)\mathrm{U}_B(r,s) = \mathrm{U}_B(t,s)$ *với mọi* $t \geq r \geq s \geq 0$.

2. Ánh xạ $(t,s) \mapsto \mathrm{U}_B(t,s)x$ *là liên tục với mọi* $x \in X_0$.

3. Tồn tại các hằng số $K, \omega \geq 0$ *sao cho*

$$\left\|U_B(t,s)x\right\| \leq Ke^{\omega(t-s)}\left\|x\right\|, \forall t \geq s \geq 0, x \in X_0 \quad (5)$$

Tiếp theo chúng ta nhắc lại một số khái niệm sử dụng trong bài báo [6]

$$\mathbf{M}\left(\mathbb{R}_+\right) := \left\{ f \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}_+\right) \middle| \sup_{t\geq 0}\int_t^{t+1} |f(\tau)|\, d\tau < \infty \right\}$$

với chuẩn $\left\| f \right\|_{\mathbf{M}} := \sup_{t\geq 0}\int_t^{t+1} |f(\tau)|\, d\tau.$

Định nghĩa 2. *Không gian hàm Banach E được gọi là chấp nhận được nếu nó thoả mãn:*

(i) Tồn tại hằng số $M \geq 1$ *sao cho mọi* $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$ *và mọi* $\varphi \in E$ *ta có:*

$$\int_a^b |\varphi(t)|\, dt \leq \frac{M(b-a)}{\left\|\chi_{[a,b]}\right\|_E}\left\|\varphi\right\|_E.$$

(ii) E là bất biến với toán tử Λ_1, *trong đó* $\Lambda_1\varphi(t) = \int_t^{t+1} \varphi(\tau)d\tau.$

(iii) E là T_τ^+ *và* T_τ^- *bất biến với mọi* $\tau \in \mathbb{R}_+$,

với $T_\tau^+\varphi(t) = \begin{cases} \varphi(t-\tau), & t \geq \tau \geq 0 \\ 0, & 0 \leq t < \tau \end{cases}$

$T_\tau^-\varphi(t) = \varphi(t+\tau) \forall$ ⊵

Hơn nữa, tồn tại $N_1, N_2 > 0$ *sao cho* $\left\|T_\tau^+\right\| \leq N_1, \left\|T_\tau^-\right\| \leq N_2$ *với mọi* $\tau \in \mathbb{R}_+$

Bổ đề 3. *Cho E là không gian hàm Banach chấp nhận được. Ta có các khẳng định sau:*

(i) Cho $\varphi \in L_{1,loc}(\mathbb{R}_+)$ *sao cho* $\varphi \geq 0$ *và* $\Lambda_1\varphi \in E$ *. Với mọi* $\sigma > 0$ *ta xác định* $\Lambda_\sigma^{'}\varphi$ *và* $\Lambda_\sigma^{''}\varphi$ *như sau:*

$$\Lambda_\sigma^{'}\varphi(t) = \int_0^t e^{-\sigma(t-s)}\varphi(s)ds,$$

$$\Lambda_\sigma^{''}\varphi(t) = \int_t^\infty e^{-\sigma(s-t)}\varphi(s)ds.$$

Khi đó, $\Lambda_\sigma^{'}\varphi$ *và* $\Lambda_\sigma^{''}\varphi$ thuộc E. *Hơn nữa, nếu* $\varphi \in \mathbf{M}(\mathbb{R}_+)$ *thì* $\Lambda_\sigma^{'}\varphi$ *và* $\Lambda_\sigma^{''}\varphi$ bị *chặn và*

$$\begin{aligned} \left\|\Lambda_\sigma^{'}\varphi\right\|_\infty &\leq \frac{N_1}{1-e^{-\sigma}}\left\|\Lambda_1 T_1^+\varphi\right\|_\infty \\ \left\|\Lambda_\sigma^{''}\varphi\right\|_\infty &\leq \frac{N_2}{1-e^{-\sigma}}\left\|\Lambda_1\varphi\right\|_\infty \end{aligned} \quad (6)$$

trong đó, Λ_1, T_1^+ *và* N_1, N_2 *được xác định trong Định nghĩa 2.*

(ii) Với mọi $\alpha > 0, e^{-\alpha t} \in E.$

(iii) Với mọi $b > 0, e^{bt} \notin E.$

Định nghĩa 3. *Cho E là không gian hàm Banach chấp nhận được và* $\varphi \in E$ *là hàm không âm. Hàm* $\Phi : [0,\infty) \times \mathcal{C} \to X$ *được gọi là φ-Lipschitz nếu:*

(i) $\left\|\Phi(t,0)\right\| \leq \varphi(t), \forall t \in \mathbb{R}_+.$

(ii) $\left\|\Phi(t,\phi_1) - \Phi(t,\phi_2)\right\| \leq \varphi(t)\left\|\phi_1 - \phi_2\right\|_{\mathcal{C}}$,

với mọi $t \in \mathbb{R}_+$ và $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{C}$.

Chú ý 1. *Nếu* $\Phi(t,\phi)$ *là* φ*-Lipschitz thì*

$$\|\Phi(t,\phi)\| \le \varphi(t)(1+\|\phi\|_{\mathcal{C}}), \forall \phi \in \mathcal{C}, t \ge 0$$

3. NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH TRUNG TÍNH TRONG TRƯỜNG HỢP HỌ TIẾN HÓA CÓ NHỊ PHÂN MŨ

Xét phương trình tích phân:

$$\begin{cases} Fu_t = U_B(t,s)F\phi + \\ \lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_s^t U_B(t,\xi)\lambda R(\lambda,A)\Phi(\xi,u_\xi)d\xi,\ t \ge s \ge 0 \quad (7) \\ u_s = \phi \in \mathcal{C}. \end{cases}$$

Chú ý rằng, nếu họ tiến hóa $(U_B(t,s))_{t\ge s\ge 0}$ nảy sinh từ bài toán Cauchy đặt chỉnh

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = (A+B(t))u(t) \\ u(s) \quad = x_s \in X \end{cases}$$

thì hàm $u:[s-r,\infty)\to X,$ thỏa mãn (7) được gọi là nghiệm đủ tốt của phương trình (1). Giả sử họ tiến hoá $\left(U_B(t,\ s)\right)_{t\ge s\ge 0}$ có nhị phân mũ với các toán tử chiếu nhị phân $P_B(t), t \ge 0$ và các hằng số nhị phân $N,\nu > 0$.

Ta xác định họ toán tử $P_B(t):\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ như sau:

$$\begin{aligned} &P_B(t)(\phi)(\theta) \\ &\quad = U_B(t-\theta,t)P_B(t)\phi(0), \forall \theta \in [-r,0] \quad (8) \end{aligned}$$

Khi đó, ta có $(P_B(t))^2 = P_B(t)$ do đó các toán tử $P(t), t \ge 0,$ là các toán tử chiếu trên $\mathcal{C}$. Hơn nữa,

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}P_B(t) = \{&\phi \in \mathcal{C} : \phi(\theta) = U_B(t-\theta,t)\nu_0, \\ &\forall \theta \in [-r,0], \nu_0 \in \mathrm{Im}P(t)\} \quad (9) \end{aligned}$$

Xét $\left(U_B(t,\ s)\right)_{t\ge s\ge 0}$ là họ tiến hoá nhị phân mũ với họ toán tử chiếu nhị phân $(P_B(t))_{t\ge 0}$ và các hằng số nhị phân $N,\nu > 0$. Ta định nghĩa hàm Green như sau:

$$\mathcal{G}_B(t,\tau) = \begin{cases} P_B(t)U_B(t,\tau), t > \tau \ge 0 \\ -U_B(t,\tau)_{|}\left(I - P_B(\tau)\right), 0 \le t < \tau \end{cases} \quad (10)$$

Khi đó, ta có đánh giá:

$\|\mathcal{G}_B(t,\tau)\| \le N(1+H)e^{-\nu|t-\tau|}$ với mọi $t \ne \tau$ và $t,\tau \in \mathbb{R},$ trong đó $H = \sup\limits_{t\ge 0}\|P_B(t)\| < \infty.$

Bổ đề sau đây cho ta công thức nghiệm bị chặn của phương trình (7).

Bổ đề 4. *Cho họ tiến hoá* $\left(U_B(t,\ s)\right)_{t\ge s\ge 0}$ *có nhị phân mũ với các toán tử chiếu nhị phân* $P_B(t), t \ge 0$ *và các hằng số nhị phân* $N,\nu > 0$. *Giả sử rằng, các điều kiện* (H_1,H_2,H_3) *thỏa mãn,* φ *là hàm không âm, thuộc E. Giả sử F là toán tử tuyến tính bị chặn,* Φ *là φ-Lipschitz, và u(t) là nghiệm của phương trình (7) sao cho* $\sup\limits_{t\ge s}\|u_t\| < \infty$ *với* $s \ge 0$ *cố định. Khi đó, với* $t \ge s$, $u(t)$ *thỏa mãn:*

$$\begin{cases} Fu_t = U_B(t,s)\nu_0 \\ \quad + \lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_s^\infty \mathcal{G}_B(t,\tau)\lambda R(\lambda,A))\Phi(\tau,u_\tau)d\tau \quad (11) \\ u_s = \phi \in \mathcal{C} \end{cases}$$

trong đó $\nu_0 \in X_0(s) = P_B(s)X$, *và* $\mathcal{G}_B(t,\tau)$ *là hàm Green được xác định bởi* (9).

Chứng minh:

Đặt $y(t) = \lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_s^\infty \mathcal{G}_B(t,\tau)\lambda R(\lambda,A))\Phi(\tau,u_\tau)d\tau,$

ta có $\|y(t)\| \le \int_s^\infty N(1+H)e^{-\nu|t-\tau|}(1+\|u_\tau\|_{\mathcal{C}})\varphi(\tau)d\tau.$

Sử dụng Bổ đề 3, với mọi $t \ge s$ ta có

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\le N(1+H)(1+\sup_{t\ge s}\|u_t\|_{\mathcal{C}}) \\ &\quad \times \frac{(N_1 \| \Lambda_1 T_1^+\varphi\|_\infty + N_2 \| \Lambda_1\varphi\|_\infty)}{1-e^{-\nu}}. \quad (12) \end{aligned}$$

Mặt khác, $U_B(t,s)y(s)$

$$\begin{aligned} &= -\lim_{\lambda\to\infty}\int_s^t U_B(t,s)U_B(s,\tau)_{|}(I-P_B(\tau))\Phi(\tau,u_\tau)d\tau \\ &\quad -\lim_{\lambda\to\infty}\int_t^\infty U_B(t,s)U_B(s,\tau)_{|}(I-P_B(\tau))\Phi(\tau,u_\tau)d\tau \end{aligned}$$

$$= -\lim_{\lambda\to\infty}\int_t^{\infty} U_B(t,\tau)_{|}(I-P_B(\tau))\Phi(\tau,u_\tau)d\tau$$

$$-\lim_{\lambda\to\infty}\int_t^{\infty} U_B(t,\tau)_{|}(I-P_B(\tau))\Phi(\tau,u_\tau)d\tau.$$

Do đó,

$$y(t)=U_B(t,s)y(s)+\lim_{\lambda\to\infty}\int_s^t U_{\ B}(t,\tau)\Phi(\tau,u_\tau)d\tau.$$

Vì $u(t)$ là nghiệm của phương trình (7) nên $Fu_t - y(t) = U_B(t,s)\big(Fu_s - y(s)\big)$.

Đặt $v_0 = Fu_s - y(s)$. Do Fu_t và $y(t)$ bị chặn trên $[s,\infty)$ nên $v_0 \in X_0(s)$ và

$$P_B(s)Fu_s = P_{\ B}(s)F\phi = v_0.$$

Do vậy, $Fu_t = U_B(t,s)v_0 + y(t)$, với $t \ge s$.

Định lý 1. *Giả sử họ tiến hoá* $\big(U_B(t,\ s)\big)_{t\ge s\ge 0}$ *có nhị phân mũ với các toán tử chiếu nhị phân* $P_B(t),\ t\ge 0$ *và các hằng số nhị phân* $N,\nu>0$. *Xét các toán tử chiếu* $P_B(t)$ *được xác định như trong (8). Toán tử sai phân* $F:\mathcal{C}\to X$ *có dạng* $F=\delta_0-\Psi$ *với* $\Psi\in L(\mathcal{C},X),\ \|\Psi\|<1$ *và* δ_0 *là hàm Dirac tập trung tại 0. Giả sử rằng* φ *là hàm không âm, thuộc không gian hàm Banach chấp nhận được E. Cho toán tử trễ* $\Phi:\mathbb{R}_+\times\mathcal{C}\to X$ *là* φ*-Lipschitz. Đặt*

$$k := \frac{e^{\nu r}(1+H)N(N_1\|\Lambda_1 T_1^{+}\varphi\|_\infty + N_2\|\Lambda_1\varphi\|_\infty)}{1-e^{-\nu}}.$$

Khi đó, nếu $\dfrac{k}{1-\|\Psi\|}<1$, *thì với mỗi hàm* $\phi\in \mathrm{Im}P_B(s)$ *có một và chỉ một nghiệm* $u(t)$ *của phương trình (11) trên* $[s-r,\infty)$ *thoả mãn* $P_B(s)u_s=\phi$ *và* $\sup_{t\ge s}\|u_t\|_{\mathcal{C}}<\infty$, *ở đây hàm* u_s *được xác định bởi* $u_s(\theta)=Fu_{s-\theta}$ *với mọi* $-r\le\theta\le 0$.

Chứng minh. Từ $\phi\in \mathrm{Im}P_B(s)$ bởi (8), tồn tại $v_0\in \mathrm{Im}P_B(s)$ sao cho $\phi(\theta)=U_{\mathbf{B}}(s-\theta,s)v_0$ với mọi $-r\le\theta\le 0$. Dễ thấy, $v_0=\phi(0)$. Kí hiệu $C_b([s-r,\infty),X)$ là không gian Banach gồm các hàm liên tục, bị chặn, nhận giá trị trong X và xác định trên $[s-r,\infty)$ được trang bị chuẩn sup, ký hiệu là $\|.\|_\infty$. Ta xét: $\tilde{\Psi}: C_b([s-r,+\infty),X)\to C_b([s-r,+\infty),X)$ xác định bởi:

$$\big[\Psi u\big](t)=\begin{cases}\Psi(u_t), & s\le t\\ \Psi(u_s), & -r\le t\le s.\end{cases} \tag{13}$$

Do $\|\Psi\|<1$ ta có $\|\tilde{\Psi}\|\le\|\Psi\|<1$. Do đó, toán tử $I-\tilde{\Psi}$ là khả nghịch. Với $v_0=\phi(0)\in \mathrm{Im}P(s)$ như trên, ta xét ánh xạ $F_\phi: C_b\left([s-r,+\infty),X\right)\to C_b\left([s-r,\infty),X\right)$ xác định bởi

$$\left(F_\phi u\right)(t)$$

$$=\begin{cases}U_B(t,s)v_0+\lim_{\lambda\to\infty}\int_s^{\infty}\mathcal{G}_B(t,\tau)\Phi(\tau,u_\tau)d\tau, t\ge s\\ U_B(2s-t,s)v_0+\lim_{\lambda\to\infty}\int_s^{\infty}\mathcal{G}_B(2s-t,\tau)\Phi(\tau,u_\tau)d\tau,\\ \qquad\qquad s-r\le t\le s\end{cases} \tag{14}$$

Ta có ước lượng: $\|(F_\phi u)(t)-(F_\phi v)(t)\|$

$$\le\lim_{\lambda\to\infty}\int_s^{\infty}\left\|\mathcal{G}_B(t,\tau)\big(\Phi(\tau,u_\tau)-\Phi(\tau,v_\tau)\big)\right\|d\tau$$

$$\le N(1+H)\int_s^{\infty}e^{-\nu|t-\tau|}\varphi(\tau)\|u_\tau-v_\tau\|_{\mathcal{C}}\,d\tau$$

$$\le ke^{-\nu r}\sup_{\xi\ge s-r}\|u(\xi)-v(\xi)\|,\quad t\ge s$$

và $\|(F_\phi u)(t)-(F_\phi v)(t)\|$

$$\le\lim_{\lambda\to\infty}\int_s^{\infty}\left\|\mathcal{G}_B(2s-t,\tau)\big(\Phi(\tau,u_\tau)-\Phi(\tau,v_\tau)\big)\right\|d\tau$$

$$\le N(1+H)\int_s^{\infty}e^{-\nu|2s-t-\tau|}\varphi(\tau)\|\ u_\tau-v_\tau\|_{\ \mathcal{C}}\,d\tau$$

$$\le N(1+H)e^{\nu r}\int_s^\infty e^{-\nu|s-\tau|}\varphi(\tau)\|u_\tau - v_\tau\|_{\mathcal{C}}\,d\tau$$

$$\le k\sup_{\xi\ge s-r}\|u(\xi)-v(\xi)\|,\ -r+s\le t\le s$$

Do đó,

$$\sup_{t\ge s-r}\|(Fu)(t)-(Fv)(t)\|\le k\sup_{t\ge s-r}\|u(t)-v(t)\|.$$

Đặt $T := (I-\Psi)^{-1}F_\phi$.

Sử dụng chuỗi Neumann, ta có:

$$\begin{aligned}&(Tu)(t)-(Tv)(t)\\&=\Big[\Big(\sum_{n=0}^\infty\Psi^n\Big)F_\phi u\Big](t)-\Big[\Big(\sum_{n=0}^\infty\Psi^n\Big)F_\phi v\Big](t)\\&=\big[(F_\phi u)(t)-(F_\phi v)(t)\big]\\&\quad+\big[(\Psi F_\phi u)(t)-(\Psi F_\phi v)(t)\big]+\dots\end{aligned}$$

Bằng quy nạp có thể chỉ ra

$$\begin{aligned}&\|(\Psi^n F_\phi u)(t)-(\Psi^n F_\phi v)(t)\|\\&\le k\|\Psi\|^n\sup_{\xi\ge s-r}\|u(\xi)-v(\xi)\|\end{aligned}\qquad(15)$$

với mọi $t\ge s-r$ và $n\in\mathbb{N}$. Suy ra

$$\begin{aligned}&\|(Tu)(t)-(Tv)(t)\|\\&\le\Big(\sum_{n=0}^\infty\|\Psi\|^n\Big)k\sup_{\xi\ge s-r}\|u(\xi)-v(\xi)\|\\&\le\frac{k}{1-\|\Psi\|}\sup_{\xi\ge s-r}\|u(\xi)-v(\xi)\|.\end{aligned}$$

Do đó,

$$\sup_{\xi\ge s-r}\|(Tu)(\xi)-(Tv)(\xi)\|\le\frac{k}{1-\|\Psi\|}\sup_{\xi\ge s-r}\|u(\xi)-v(\xi)\|$$

Vậy, với $\dfrac{k}{1-\|\Psi\|}<1$ thì ánh xạ $T: C_b\big([s-r,\infty),X\big)\to C_b\big([s-r,\infty),X\big)$ là một ánh xạ co. Vì vậy, tồn tại duy nhất hàm sao cho $Tu = u$. Vậy $u(t),\ t\ge s-r$ là nghiệm duy nhất của phương trình (11) với

$$\begin{aligned}&(F_\phi u_s)(\theta)=U_B(s-\theta,s)\nu_0\\&\quad+\lim_{\lambda\to\infty}\int_s^\infty\mathcal{G}_B(s-\theta,\tau)\Phi(\tau,u_\tau)d\tau,\ \forall\theta\in[-r,0]\end{aligned}$$

và $P_B(s)Fu_s=\nu_0$. Do đó, $P_B(s)\tilde{u}_s=\phi$ theo định nghĩa của $P_B(s)$ (đẳng thức (8)).

4. ỨNG DỤNG

Xét phương trình vi phân trung tính

$$\begin{aligned}&\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}-k\frac{\partial w(x,t-1)}{\partial t}=\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}\\&-k\frac{\partial^2 w(x,t-1)}{\partial x^2}-v(t)\big[(w(x,t)-kw(x,t-1))\big]\\&+bte^{-\alpha|t|}\int_{-1}^0\ln(1+|w(x,t+\theta)|)d\theta,\end{aligned}\qquad(16)$$

với mọi $0\le x\le\pi,\ t\ge s;\ t,s\in\mathbb{R},\theta\in[-1,0]$,

$w(0,t)=w(\pi,t)=0$,

$w_s(x,\theta):=w(x,s+\theta)=\psi(x,\theta)$,

trong đó k là hằng số thực với $|k|<1$.

Hàm $v(.)\in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ thỏa mãn điều kiện $\rho\le v(.)$, ρ là hằng số dương cố định. Ta chọn không gian Hilbert $X := L_2[0,\pi]$ và xét toán tử A xác định bởi: $A(f)=f''$ với miền xác định

$$D(A):=\{f\in W^{2,2}[0,\pi]:\ f(0)=f(\pi)=0\}.$$

Sử dụng các kết quả của nửa nhóm toán tử ta có: $(0,\infty)\subset\rho(A),\quad\|R(\lambda,A)\|\le\dfrac{1}{\lambda},\ \forall\lambda>0$ và $\overline{DA}=\{y\in X: y(0)=y(\pi)=0\}$. Do đó, giả thiết (H_1) được thỏa mãn. Hơn nữa, toán tử A sinh ra nửa nhóm liên tục mạnh $(T_0(t))_{t\ge0}$ trên $\overline{DA}$ sao cho $\|T_0(t)\|\le e^{-t},\ t\ge0$. Chúng ta xét họ toán tử $(B(t))_{t\ge0}$ trên $\overline{DA}$ xác định bởi: $B(t)=-v(t)I,\ t\ge0$. Từ $v(.)\in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, ánh xạ $t\mapsto B(t)x$ là đo được mạnh. Do đó, giả thiết (H_2) được thỏa mãn. Hơn nữa, $(B(t))_{t\ge0}$ sinh ra họ tiến hóa $(U(t,s))_{t\ge s\ge0}$ trên $\overline{DA}$ được xác định bởi $U(t,s):=e^{-\int_s^t v(\sigma)d\sigma,}$, với $t\ge s\ge0$. Suy ra $\|U(t,s)\|\le e^{-\rho(t-s)}$. Vì vậy, $(A+B(t))_{t\ge0}$ sinh ra họ tiến hóa thỏa mãn

$\|U_B(t,s)\| \le 2e^{-\min(1,\rho)(t-s)}$, $t \ge s \ge 0$. Do đó. $(U_B(t,s))_{t\ge s\ge 0}$ có nhị phân mũ với phép chiếu $(P_B(t))_{t\ge 0}$ sao cho $P_B(t) = I\mathrm{x}_0$, $\forall t \ge 0$ và hằng số $N = 2, \nu = \min(1,\rho) > 0$. Điều này có nghĩa giả thiết (H_4) được thỏa mãn.

Trên $\mathcal{C} := C([-1,0], X)$ chúng ta định nghĩa toán tử sai phân F và toán tử trễ Φ như sau:

$F : \mathcal{C} \to X, F(f) := f(0) - kf(-1)$

$\Phi : \mathbb{R} \times \mathcal{C} \to X,$

$$\Phi(t,\phi) := b\,te^{-\alpha|t|}\int_{-1}^{0} \ln(1+|(\phi(\theta))(x)|)d\theta,$$

$t \in \mathbb{R},\ x \in [0,\pi].$

Khi đó, phương trình (16) được viết dưới dạng:

$$\frac{\partial}{\partial t} Fu_t(\cdot) = \big(A + B(t)\big) Fu_t(\cdot) + \Phi(t, u_t(\cdot,\theta)),$$

với $t \ge s$, thỏa mãn $u_s = \phi \in \mathcal{C}$. Lưu ý Φ lấy giá trị trong $X := L_2[0,\pi]$ nên ta có thể dễ dàng chứng minh Φ là φ-Lipschitz bằng cách sử dụng bất đẳng thức Minkowski, với $\varphi(t) = |b|rte^{-|\alpha|t}, t \in \mathbb{R}$ thuộc $E = L_p(\mathbb{R})$, $p \ge 1$ ([7, Example 3.9]). Các hằng số trong Định nghĩa 2 được chọn $N_1 = N_2 = 1$.

Ta có $\Lambda_1\varphi(t) = \int_t^{t+1} \varphi(\tau)d\tau$ và

$\Lambda_1 T_1^+\varphi(t) = \int_{(t-1)_+}^{t} \varphi(\tau)d\tau,$

trong đó $(t-1)_+ = \max\{0, t-1\}$. Do vậy $\max\left\{\|\Lambda_1\varphi(t)\|_\infty, \|\Lambda_1 T_1^+\varphi(t)\|_\infty\right\} < |b|r$ và giả thiết (H_3) được thỏa mãn. Theo Định lý 1 ta có kết quả sau:

Nếu $|b|r < \dfrac{e^{-\nu r}(1-e^{-\nu})(1-\|\Psi\|}{2N(1+H)}$ thì phương trình (16) tồn tại nghiệm duy nhất.

5. KẾT LUẬN

Bài báo đã chứng minh được sự tồn tại và duy nhất nghiệm của phương trình trung tính (1) với phần tuyến tính thỏa mãn điều kiện Hille - Yosida. Với họ tiến hóa có nhị phân mũ, chúng tôi biểu diễn nghiệm đủ tốt của phương trình (1) thông qua hàm Green từ đó thiết lập Định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm. Sau đó, áp dụng giải phương trình vi phân hàm cụ thể. Những kết quả của bài báo góp phần làm phong phú thêm lý thuyết về dáng điệu tiệm cận của phương trình vi phân hàm trung tính.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Engel K.J., Nagel R, *One-parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Graduate Text Math, 194, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, (2000).

[2] Jendoubi, Chiraz On the theory of periodic solution for some nondensely nonautonomous delayed partial differential equations, Math. Methods Appl. Sci. 42, no. 18, 6588–6606, (2019).

[3] Jendoubi C, Integral manifolds of a class of delayed partial differential equations with nondense domain, Numerical Functional Analysis and Optimization;38:1024- 1044, (2017).

[4] J. Hale, Partial neutral-functional differential equations, Revue Roumaine de Mathématique Pures et Appliquées, 39, 339 – 344, (1994).

[5] J. Wu and H. Xia, *Self-sustained oscillations in a ring array of lossless transmission lines*, Journal of Differential Equations, 124, 247 – 278, (1996).

[6] Huy N.T., Exponential dichotomy of evolution equations and admissibility of function spaces on a half-line, J. Funct. Anal. 235, 330-354, (2006).

[7] N.T. Huy and P.V.Bang, Unstable manifolds for partial neutral differential equations and admissibility of function spaces, Acta Mathematica Vietnamica, 42, 187-207, (2017).

Thông tin liên hệ: **Phạm Văn Bằng**

Điện thoại: 0947393286 - Email: pvbang@uneti.edu.vn

Khoa Khoa học ứng dụng, Trường Đại học Kinh tế Kỹ thuật - Công nghiệp.